2019 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　160011

參展科別　物理與天文學

作品名稱　波濤洶湧的玻璃杯—玻璃杯共振之研究

得獎獎項　大會獎：二等獎

突尼西亞國際工程與科技展覽會

出國正選代表

就讀學校　高雄市立高雄高級中學

指導教師　盧政良、高執貴

作者姓名　沈子耕

關鍵詞　共振、駐波、傅立葉轉換

作者簡介



我是來自高雄中學三年級的沈子耕, 對於一切未知的事物充滿了好奇心，熱愛學習。我喜愛物理和寫電腦程式,在實驗室研究物理是我最大的興趣。此外，我也喜愛彈鋼琴，小時候就讀音樂班的我，對於鋼琴情有獨鍾。研究物理之餘，我喜歡彈鋼琴抒發情緒，藉由美妙的音樂激發更多的靈感。期望未來可以成為一名優秀的物理學家，繼續沉浸在美好的物理世界中。

摘要

一個裝有水的玻璃杯，用喇叭撥出大聲的聲音，便能觀察到共振的現象發生，玻璃杯將會不停的震動，甚至導致破裂。本研究將會藉由傅立葉轉換(Fourier transform)來分析玻璃杯的振動的本徵頻率，並進一步探討頻譜的峰值。另外我們也研究了不同水位的高低以及液體密度對於共振頻率的影響，並以能量守恆的觀點進一步推導出玻璃杯的震動方程式。最後我們也近一步討論 higher harmonic，並且發現 non-linear dispersion relation 的現象，有別於我們對於 f∝n 的觀念。

Abstract

We can see a wine glass filled with liquid resonate with loud speakers. The glass will vibrate constantly, even brake in to fragment. In this research, I used Fourier transform to analyze the Eigen frequencies of a wine glass, and investigated the origin of those frequencies. I observed the standing wave on a wine glass. Also, I use server method to detect the standing wave. Then I derived a theoretical model based on energy conservation, in which I compute the kinetic energy and potential energy of a wine glass. In the paper A study of wine glass acoustics (A.P. French,1982) we can see a similar method of deriving eigen frequencies of a glass. However, there is a significant difference. In this research I found out that f(z), the vertical displacement of a glass, is actually a quadratic function. And I used two method to prove that. Furthermore, I investigated the relation between liquid's volume, density and eigen frequencies, and the experimental result fit my theoretical prediction. Finally, from Fast Fourier Transform diagram I observed a non-linear dispersion relation between Eigen frequencies, which is another significant finding in this research, and can be explained by my theoretical model.

壹、研究動機

電影中我們偶爾看見高強度的聲音把玻璃震破的場景，而我相當好奇究竟怎樣的頻率才能引發玻璃共振?玻璃共振的頻率會如何改變?於是我決定從生活中常見的玻璃杯下手進行探討。並嘗試以喇叭撥放不同的正弦波，觀察玻璃杯的共振現象。我相當好奇究竟液體的量、密度會如何影響整個玻璃杯的本徵頻率?

貳、研究目的及研究問題

一、研究不同玻璃杯的共振頻率及探討頻率組成的來源

二、研究不同玻璃杯水位的本徵頻率

四、研究不同密度液體的玻璃杯共振頻率

五、探討 Eigen frequency 的頻率

參、研究設備

器材	**數量**	**用途**
麥克風	1 個	測量空氣壓力，及蒐集音檔
玻璃杯	3 個	研究其共振頻率
喇叭	1 個	播放共振頻率
電腦	1 台	分析聲波
糖	1 包	改變液體的密度
BB 彈	1 包	激發玻璃杯
高速攝影機	1 台	觀察玻璃杯之振動情形
燒杯	多個	配置液體

肆、研究流程

初步討論
- 找出杯子的共振頻率
- 找出玻璃杯頻率的來源
- 比較空杯及裝了液體的酒杯

理論模型
- 圓柱體內的駐波
- 半滿杯子的共振頻率

設計實驗
- 不同水量之影響
- 不同液體密度之影響
- 尋找higher harmonic

伍、初步討論

一、尋找杯子共振頻率

為了找尋玻璃杯共振的頻率，我們採取以下兩種方式激發玻璃杯:

(a) 用喇叭共振激發玻璃杯



(b)使 BB 彈從管子自由落下，撞擊玻璃杯

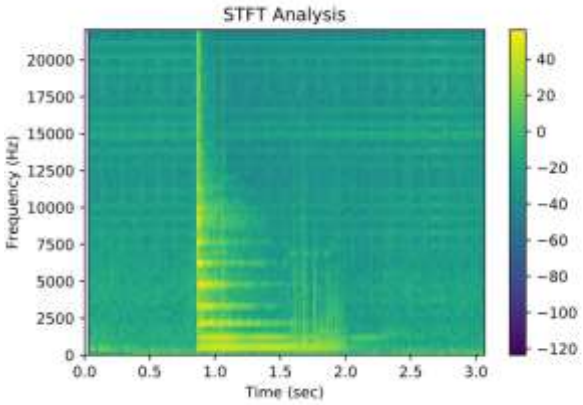


實驗分析:

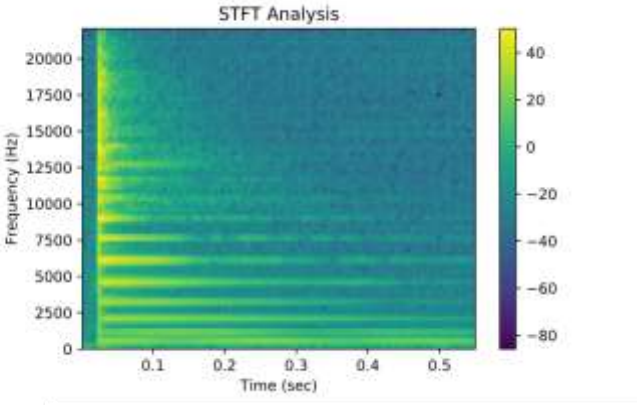
我用麥克風蒐集激發出的音頻，並寫程式對進音頻行 Fast Fourier Transform(FFT) 及 Short Time Fourier Transform(STFT)

實驗結果

Short Time Transform:



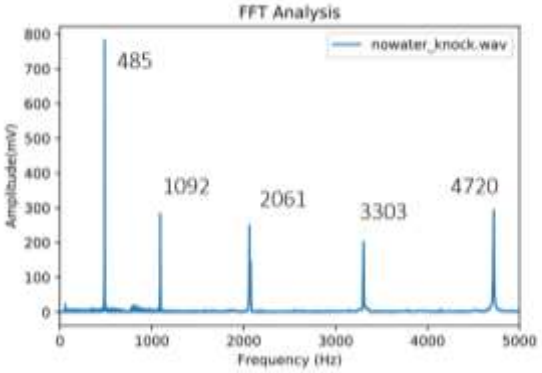
(a) 喇叭共振激發

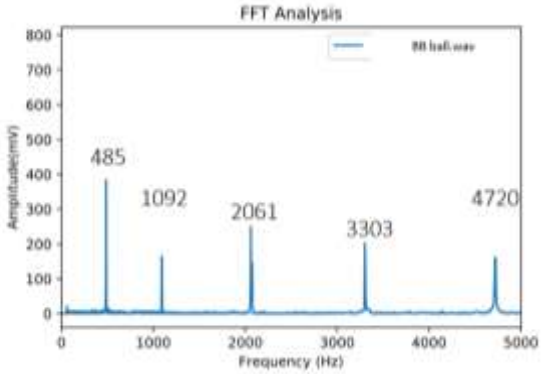


(b) BB 彈自由落下

由 STFT 的圖我們可以看出頻率的組成是穩地的，並不會隨時間改變。而基音的部分由於能量較高，所以持續的時間相對較其他高頻久。

Fast Fourier Transform:





由 FFT 的圖我們不難看出無論我如何激發玻璃杯，玻璃杯的頻譜是類似的。這證明了玻璃杯的本徵頻率並不會隨著激發方式不同而有所改變。

觀察共振現象

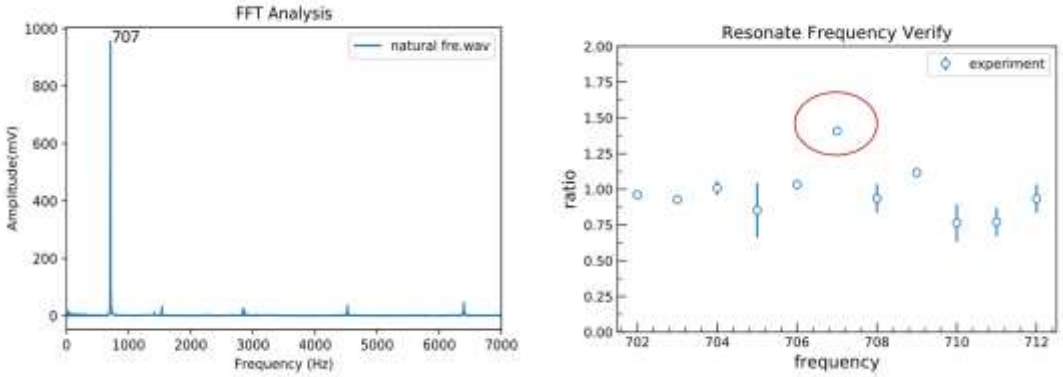
我們用喇叭持續撥出 FFT 圖上出現的頻率峰值，並觀察共振的現象。



若杯子達到共振，聲音便會被放大，因此我們可以定義:

$$聲音放大率 = \frac{有杯子時的音量}{沒杯子時喇叭的音量}$$

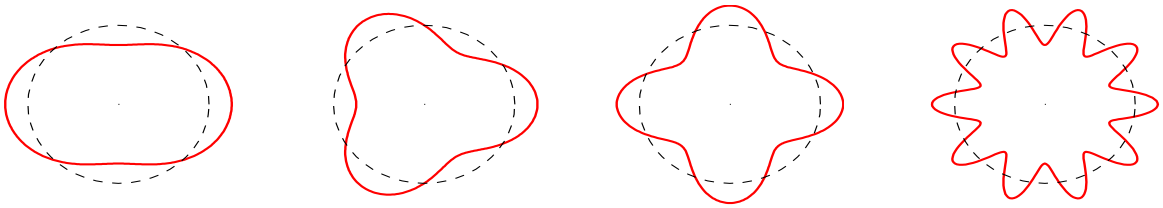
若聲音放大率越大，代表玻璃杯震動越明顯。接著我們去和 FFT 圖做比較:



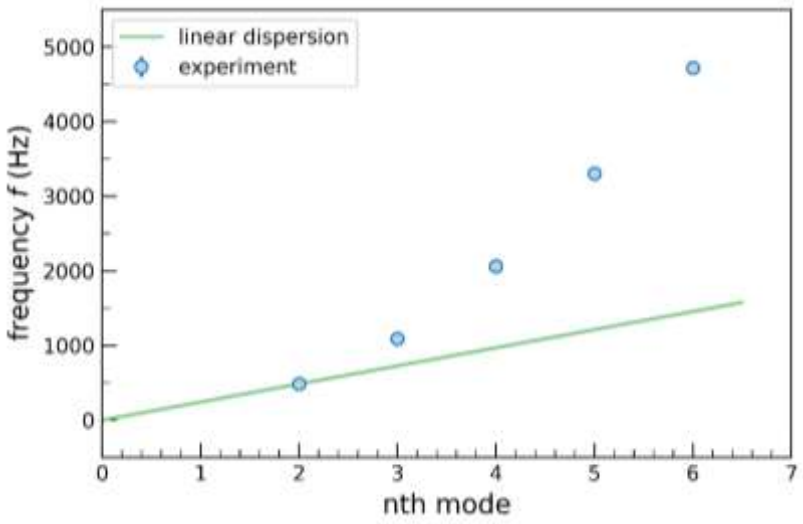
從這兩張圖，我們可以看出聲音放大率最大(共振震幅最大)的頻率和 FFT 圖中的頻率是一致的。

二、探討頻率的來源

我認為這些頻率是由杯子的角度駐波所引起的，而對於圓柱體的杯子而言，其所產生的駐波頻率滿足$f = \frac{nv}{2\pi r}$。(n=1,2,3…代表不同泛音的震動)。



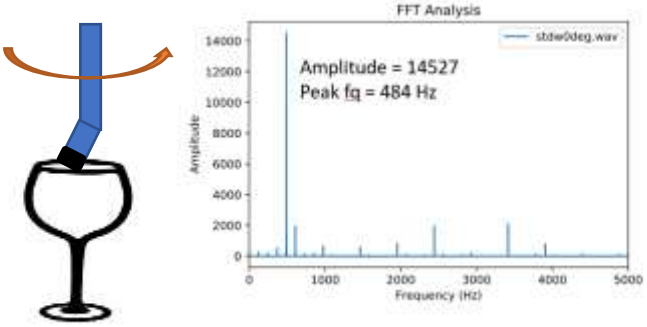
從公式中可得知理論上$f \propto n$但實際上若我們把 FFT 的峰值對應到其 n 的數量，可得以下結果:



我們並不難發現實驗中 n 和頻率的關係其實是非線性的， 這就是所謂的 non-linear dispersion relation，說明了聲音的速度會隨著時間而改變，後面會針對此現象再做更詳細的討論。

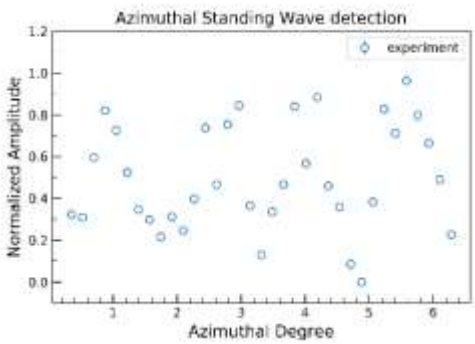
測量角度方向的駐波

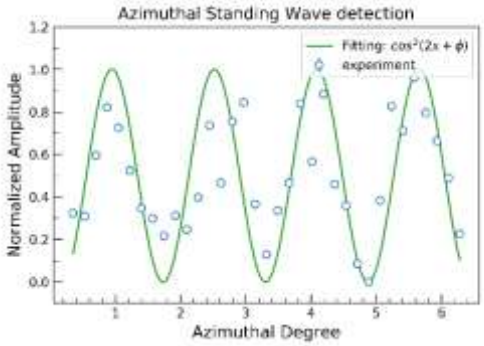
我將麥克風對著杯緣旋轉一圈，並以麥克風作為氣壓計，測量不同角度上的聲音(氣壓)強度，進一步找出駐波的節點及腹點。



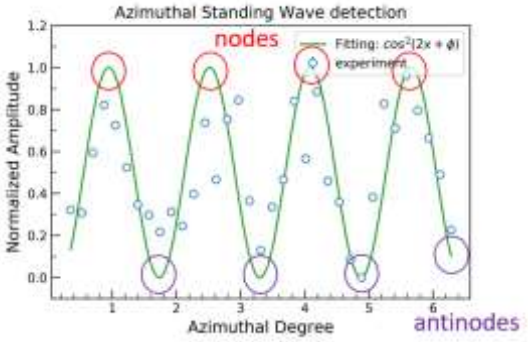
實驗結果

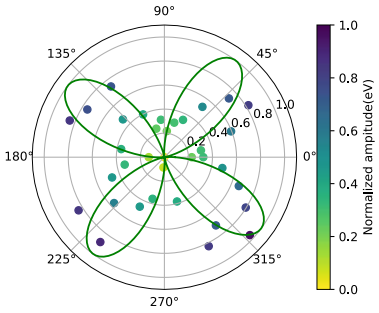
將蒐集的的資料進行 normalize 後，便可得到角度與音量的關係如下，並 fitting ϕ，可得以下結果:





而由於駐波中空氣氣壓變化是 sin 的函數，而位移變化是 cos 的函數，因此兩者之間有90°的相位差存在。所以我們可以知道駐波節點在位移最小值處(氣壓最大值)，而腹點則是在位移最大值處(氣壓最小值)。





由實驗可知，玻璃杯產生的駐波具有二個節點及二個腹點，可對應到n = 2的震動，因此我推測此玻璃杯n = 2的震動最為明顯，正好符合基音能量最高，最為容易觀察的觀點。

另外為了使駐波視覺化，我們將紙片均勻地放置在玻璃杯上，當駐波產生時，紙片會集中在波節上面:



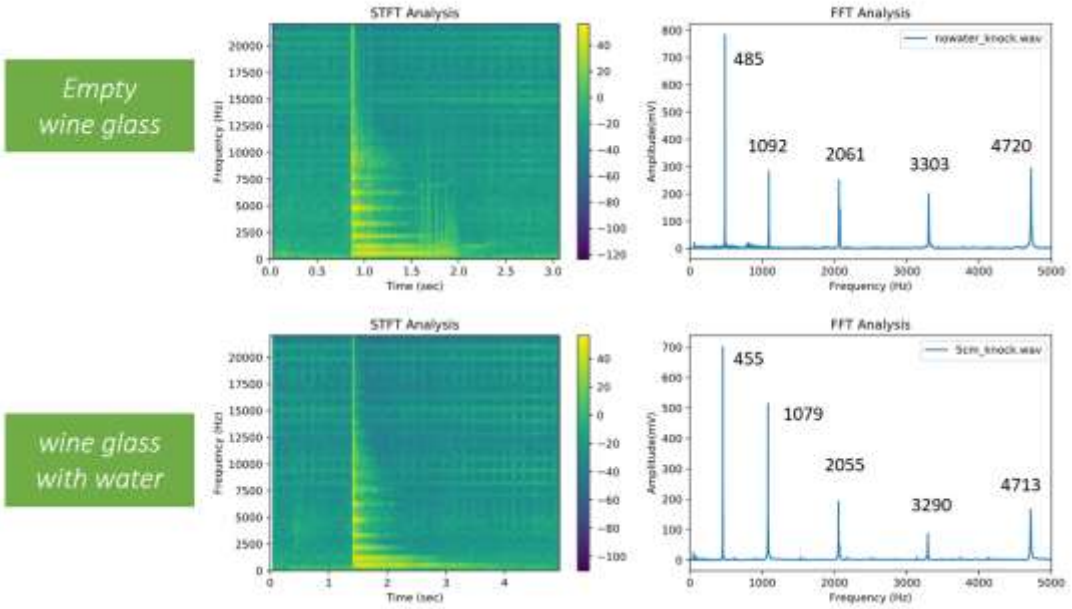


從圖中我們不難看出腹點和節點的分布情形

三、比較空酒杯及裝有液體之酒杯的頻率差異

說明

我測量了空酒杯的頻率及裝有液體之酒杯的頻率，並進行 FFT 和 STFT，如下:



討論

首先由 STFT 的圖中，我們發現了加了液體的玻璃杯頻率組成依舊穩定，不隨時間而變化。而 FFT 的圖表中我們可以發現加了水的玻璃杯其頻率均較空的玻璃杯低。我初步認為是因為加了水使的整體質量增加，因此共振頻率會更低。

陸、理論模型

一、空杯共振頻率的計算

我們從能量的觀點切入這個問題，首先能量可以表示成

$$\mathrm{E} = \mathrm{KE} + \mathrm{PE} = \mathrm{A}\dot{x}^2 + Bx^2$$

且由於能量守恆，因此若對能量進行微分，可得

$$\mathrm{E}' = 2A\ddot{x}\dot{x} + 2B\dot{x}x = 0$$

$$\mathrm{A}\ddot{x} + B\dot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{B}{A}x = 0$$

解 x 得

$$\mathrm{x} = \cos\left(\sqrt{\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}}\mathrm{t}\right) = \cos(\omega \mathrm{t})$$

因此可得

$$\omega^2 = \frac{B}{A}$$

由此可知若我們可以得知玻璃杯的動能及位能，則我們可以更進一步的算出玻璃杯的共振頻率。

共振頻率推導

玻璃杯法線方向的速度可表示為:

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = -\omega\Delta_o f(z) cos2\theta\ sin\omega t$$

切線方向速度可表示為:

$$\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{st}} = \frac{1}{2}\omega\Delta_0 f(z)\sin 2\theta \sin \omega t$$

因此玻璃杯整體的動能可以表示為:

$$\mathrm{K} = \frac{5}{8}\rho_g aR\omega^2\Delta_0^2 \sin^2(\omega t)\int_o^H [f(z)]^2 dz$$

而由一些幾何參數，我們可以得知整體位能為:

$$\mathrm{U} \approx \frac{3\pi \mathrm{Ya}^3}{8\mathrm{R}^3}\Delta_0^2 \cos^2 \omega t\left[a + \frac{4}{3}\left(\frac{R}{H}\right)^4\right]\int_o^H [f(x)]^2 dz$$

因此共振頻率:

$$\mathrm{f}_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{3Y}{5\rho_g}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{a}{R^2}\left[1 + \frac{4}{3}\left(\frac{R}{H}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}$$

Y: *楊格膜量*
ρ_g: *玻璃杯密度*

a: 玻璃杯厚度
R: 玻璃杯半徑
H: 玻璃杯高度

註:我們可以把整個玻璃杯振動時的總位移表示成:

$$\xi(z,\theta,t) = \Delta_0 f(z) cosn\theta cos\omega t$$

Δ_0: *震幅*
$f(z)$: *垂直方向位移*
$cosn\theta$: *角度方向位移*
$cos\omega t$: *隨時間的變化*

接下來我們將要討論加了水的玻璃杯及其他更高頻率的泛音

二、加水後的酒杯

酒杯加水之後會使得系統的總動能增加:

液體的動能:

$$\alpha\frac{\pi}{8}\rho_l R^2\omega^2\Delta_0^2\,sin^2\,\omega t\int_0^h[f(z)]^2dz$$

因此系統的總動能為玻璃杯的動能加水的動能:

$$K'=\omega^2\Delta_0^2\,sin^2\,\omega t\,(\frac{5\pi}{8}\rho_g aR\int_0^H[f(z)]^2dz+\alpha\frac{\pi}{8}\rho_l R^2\int_0^h[f(z)]^2dz\ )$$

而我們假設水不具可壓縮性，因此加水前後的位能不變

$$U'=U=\frac{3\pi Ya^3}{8R^3}\left[1+\frac{4}{3}\left(\frac{R}{H}\right)^4\right]\left[\int_0^H[f(z)]^2dz\right]\Delta_0^2\cos^2\omega t$$

由$\omega^2=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$，且位能不變可知:

$$\left(\frac{\omega_0}{\omega_h}\right)^2=\frac{K'}{K_0}$$

將K及K′帶入後可得:

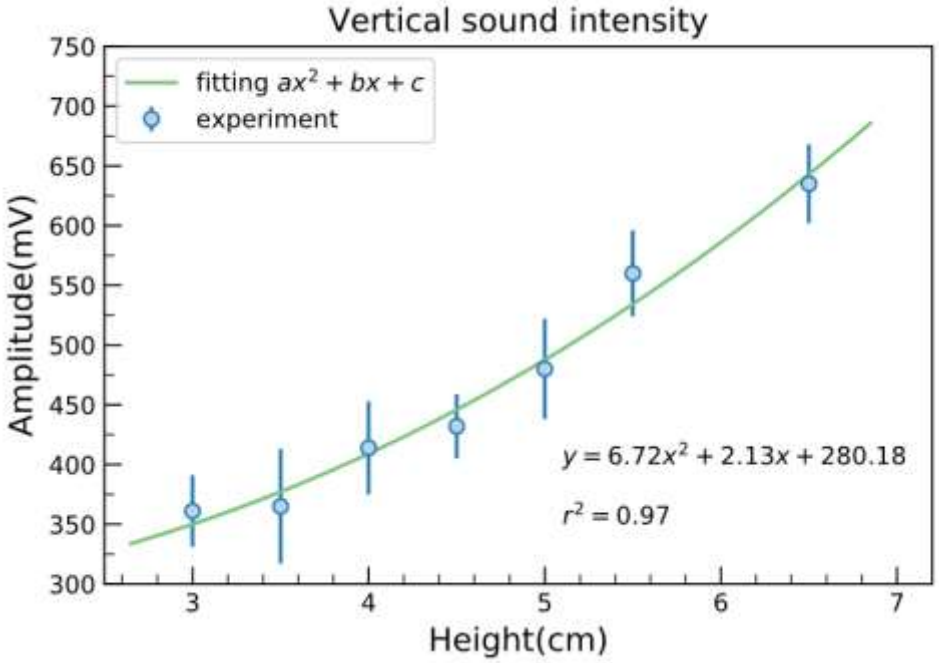
$$\left(\frac{f_0}{f_h}\right)^2=1+\frac{\alpha}{5}\frac{\rho_l R}{\rho_g a}\frac{\int_0^h[f(z)]^2dz}{\int_0^H[f(z)]^2dz}$$

到此，我們找出了空酒杯及裝水的酒杯共振頻率的關係。而我們要更進一步找出 f(z)，得知垂直方向的位移。

三、垂直位移 f(z)

我們將麥克風沿著酒杯垂直移動，測量不同位置的氣壓，並轉換成位移

實驗結果



由實驗結果可知:f(z)應為二次函數，而由已知的方程式:

$$\left(\frac{f_0}{f_h}\right)^2 = 1 + \frac{\alpha}{5}\frac{\rho_l R}{\rho_g a}\frac{\int_0^h [f(z)]^2 dz}{\int_0^H [f(z)]^2 dz}$$

$f(z)^2$積分後可得 5 次方

因此我們便可寫出關係式

$$\left(\frac{f_0}{f_h}\right)^2 = 1 + \frac{\alpha}{5}\frac{\rho_l R}{\rho_g a}\left(\frac{h}{H}\right)^5$$

三、諧音探討(cosnθ)

我們一樣可以用能量的角度算出共振頻率:

動能:

$$K_n = \frac{\pi}{2}\rho_g a R \omega^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\Delta_0^2 \sin^2 \omega t \int_0^H [f(z)]^2 dz$$

位能:

$$U_n = \frac{\pi Y a^3}{24R^3}\left[(n^2-1)^2 + \left(\frac{R}{H}\right)^4\right]\Delta_0^2 \cos^2\omega t \times \int_0^H [f(z)]^2 dz$$

因此共振頻率應為:

$$f_n = \frac{1}{12\pi}\left(\frac{3Y}{\rho_g}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{a}{R^2}\left[\frac{(n^2-1)^2 + \left(\frac{R}{H}\right)^4}{1+1/n^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

此時我們便可發現 non-linear dispresion relation 的發生，若我們整理一下式子:

$$n = \frac{2\pi r f}{v} \text{帶入}$$

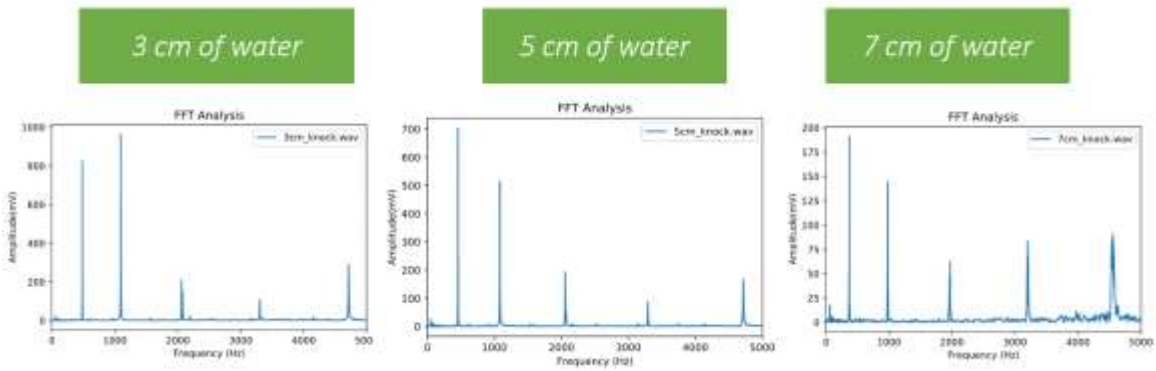
$$f = \frac{1}{12\pi}\left(\frac{3Y}{\rho_g}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{a}{R^2}\left[\frac{\left(\frac{(2\pi r f)^2}{v^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{R}{H}\right)^4}{1+\frac{v^2}{(2\pi r f)^2}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

我們便可發現聲速會隨著頻率而改變，頻率越高聲速也就越快，是一個創新的發現。

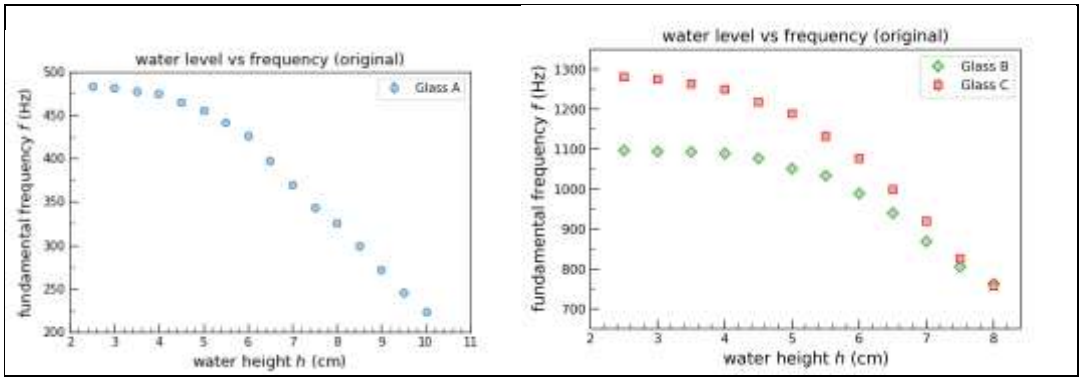
柒、實驗變因

一、改變水量

我們改變不同液體的量，並以三個不同玻璃杯做實驗，比較其共振頻率:



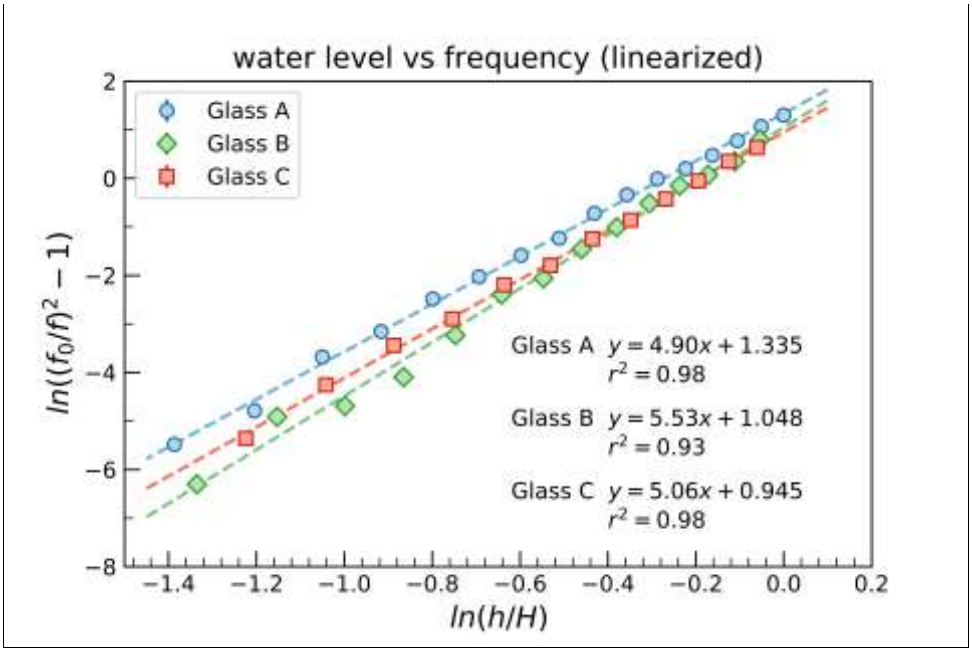
實驗結果



由於我們推得

$$\left(\frac{f_0}{f_h}\right)^2 = 1 + \frac{\alpha}{5}\frac{\rho_l R}{\rho_g a}\left(\frac{h}{H}\right)^5$$

若將座標軸做些變化並取 log,便可得到正比關係

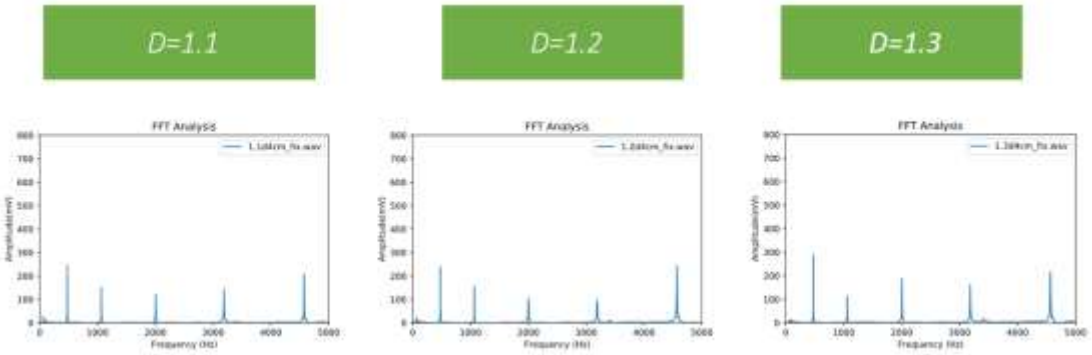


由於取 log，每一條斜直線的斜率可以對應到$\left(\frac{h}{H}\right)$ 的次方數，可以發現都接近 5，和我們推導的理論完全符合。

二、液體密度之影響

我們將糖加入液體中，改變液體密度，觀察液體密度對頻率的影響

實驗結果

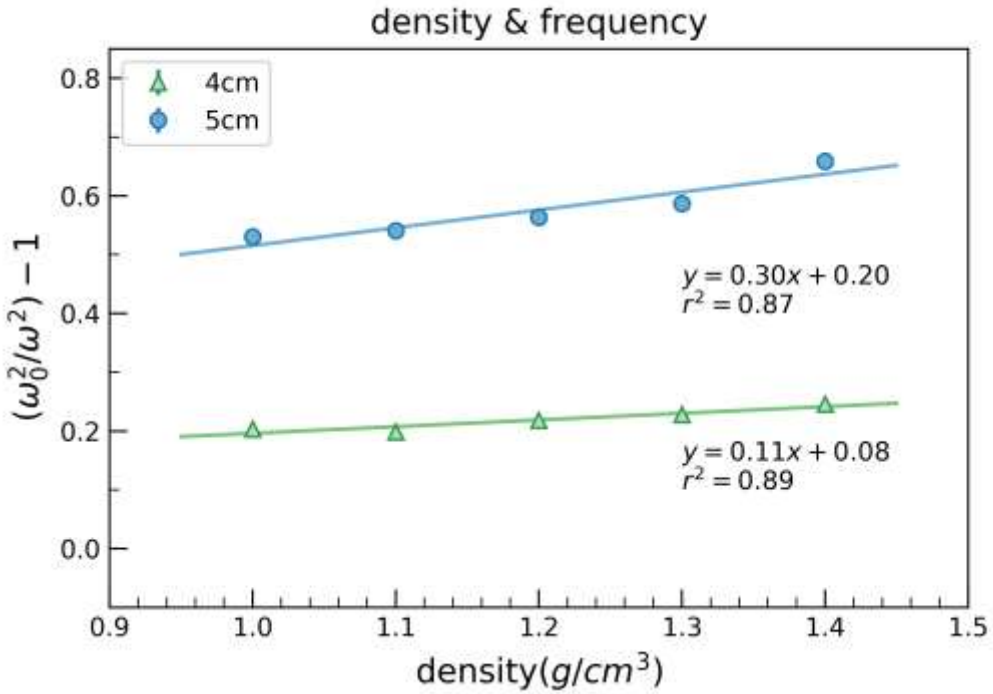


由方程式

$$\left(\frac{f_0}{f_h}\right)^2 = 1 + \frac{\alpha}{5}\frac{\rho_l R}{\rho_g a}\left(\frac{h}{H}\right)^5$$

可得:

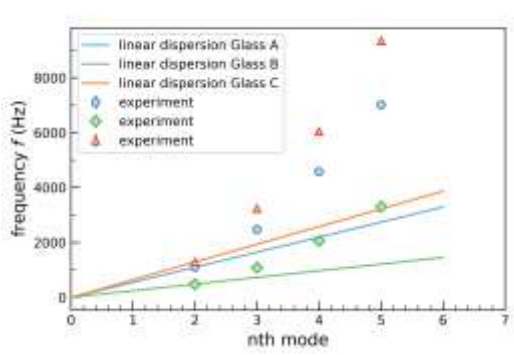
$$\left(\frac{f_0}{f_h}\right)^2 - 1 \propto \rho_l$$

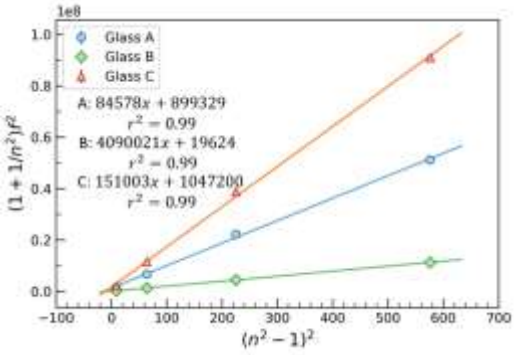


而我們的實驗結果完全符合理論的正比關係，可見理論推導沒有重大的錯誤。

三、諧音偵測

我們測量三個不同玻璃杯其各自的諧音，觀察 non-linear dispresion relation ˇ 的現象。





由公式

$$f(n) = \frac{1}{12\pi}\left(\frac{3Y}{\rho_g}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{a}{R^2}\left[\frac{(n^2-1)^2 + (R/H)^4}{1+1/n^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

我們可知

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)f^2(n) = A(n^2-1)^2 + B$$

而從實驗結果來看，和理論相當接近。

捌、總結

這個研究中我們成功的算出了玻璃杯共振頻率及其他變因之間的關係，也做了實驗來應證，而實驗和理論相當符合。大致上我從能量的觀點進行研究，得知液體的量、密度越大，共振的頻率就會越低，這是因會整體動能增加導致，即 $\omega^2=B/A$ 中的 A 變大，因此頻率會變小。此外我們還測量了玻璃杯的駐波，得知玻璃杯 n=2 的震動最為明顯，符合越低諧音，能量越高的觀點。另外我們也成功地找出了不同諧音的頻率，並發現和實驗結果相當符合，成功的解釋 non-linear dispersion relation 現象。

玖、參考資料

[1] Walker, Jearl, David Halliday, and Robert Resnick. 2011. *Fundamentals of physics*. Hoboken, NJ: Wiley.

[2] Thornton, Marion. *Classical Dynamics of point particles and systems 5e.* Brookscole

[3] Matthew J. Hancock, John W. M. Bush. 2002. *Fluid pipes*. J. Fluid Mech. (2002), vol. 466, pp. 285 – 304.

【評語】160011

本作品分析酒杯之共振模式以及加入液體後的影響，作者使用的實驗方法與科學分析清晰。是一個完整的研究作品，值得鼓勵。作者在實驗的量測與模型的建立十分完整，建議可以做一些延伸實驗的設計。